PRACTICO 4-1

CAMPOS VECTORIALES
CAMPOS VECTORIALES – DEFINICION

a) EN EL PLANO - DEFINICIÓN

Sea **D** un conjunto de $\mathbf{R^2}$ (una región plana). Un campo vectorial sobre $\mathbf{R^2}$ está dado por una función **F** que asigna a cada punto (x,y) en **D** un vector bidimensional $F(x,y)$. Podemos expresarlo en términos de sus funciones componentes como:

$$F(x,y) = P(x,y)\,i + Q(x,y)\;j$$

La forma de representar un campo vectorial en el plano es dibujar una flecha que represente al vector $F(x,y)$ que comience en el punto (x,y)

b) EN EL ESPACIO – DEFINICIÓN

Sea **E** un subconjunto de $\mathbf{R^3}$. Un campo vectorial en $\mathbf{R^3}$ es una función **F** que asigna a cada punto (x,y,z) en **E** un vector tridimensional $F(x,y,z)$ Podemos expresarlo en términos de sus funciones componentes como:

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\;j + R(x,y,z)\,k$$

La forma de representar un campo vectorial en el espacio es dibujar una flecha que represente al vector $F(x,y,z)$ con su punto de aplicación en el punto (x,y,z)

EJEMPLOS DE DIVERSOS CAMPOS VECTORIALES

a) LEY DE COULOMB

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.
En términos matemáticos, la magnitud F de la fuerza que cada una de las dos cargas puntuales q1 y q2, separadas una distancia d, ejerce sobre la otra puede expresarse como:

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}$$

b) CAMPO ELECTRICO

El campo eléctrico *E* creado por una carga puntual q en un punto **P** situado a una distancia **r** de la carga se define suponiendo que en **P** hay una carga muy pequeña sobre la que actuará una fuerza: $E = k \cdot \dfrac{q}{d^2}$

c) CAMPO GRAVITACIONAL

La ley de Newton de la gravitación universal enuncia que la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos objetos, con masa m y M está dado por:

$$|F| = \frac{m\,M\,G}{d^2}$$

Donde **d** es la distancia entre los objetos y **G** es la constante gravitacional.
El campo gravitacional asocia un vector (fuerza $\mathbf{F}_{(r)}$) a cada punto en el espacio.

---

1. Grafique los siguientes campos vectoriales, dibujando algunos vectores representativos del mismo y ubicando cada vector con su origen en el punto (x, y)
   a) $\mathrm{F}(x, y) = -xi + yj$
   b) $\mathrm{F}(x, y) = x\vec{i} + 2y\,\vec{j}$

GRADIENTE - DEFINICIÓN

a) Si $f(x, y)$ es una **función de dos variables**, entonces el gradiente de f es la función vectorial ∇f definida como:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

b) Si $f(x, y, z)$ es una **función de tres variables**, entonces el gradiente de f es la función vectorial ∇f definida como:

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

---

2. Calcule el campo vectorial gradiente de
   a) $f(x, y) = x^5 - 4x^2y^3$
   b) $f(x, y, z) = xy^2 - yz^3$

ROTOR – DEFINICION

Si $F(x, y, z) = P(x, y, z)\,i + Q(x, y, z)\,j + R(x, y, z)\,k$ es un campo vectorial sobre $\mathbf{R}^3$ y las derivadas parciales de **P, Q** y **R** existen, entonces el rotor de **F** es el campo vectorial sobre $\mathbf{R}^3$ definido mediante el **producto cruz** de ∇ con el campo vectorial **F** de la siguiente manera:

$$rotF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

---

3. Halle el rotor de $F = xz^3\,\hat{i} - 2x^2yz\,\hat{j} + 2yz^4\,\hat{k}$ en el punto (-1,-1,1)

DIVERGENCIA – DEFINICION

Si $F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbf{R}^3$ y $\partial P/\partial x, \partial Q/\partial y, \partial R/\partial z$ existen, entonces la **divergencia de F** es el campo escalar – función de tres variables - definida mediante el **producto punto** por de ∇ con el campo vectorial **F** de la siguiente manera:

$$div\ \mathrm{F} = \nabla \bullet F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

---

4. Determine la divergencia de $F(x,y,z) = xzi + xyzj - y^2 k$,

---

5. Determine el rotor y divergencia de los siguientes campos vectoriales:
   a) $F(x,y,z) = 2x\,\vec{i} - 4y\,\vec{j} + 7z\,\vec{k}$
   b) $F(x,y,z) = \left\langle z\,e^{-y}, -y\,e^{x}, x\ln z \right\rangle$

CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

a) Si $f(x,y,z)$ es una función que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $rot\,(\nabla f) = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

b) Si $\vec{F}(x,y,x)$ F es un campo vectorial definido sobre todo **R³**, cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y cuyo $rot\,\mathrm{F} = 0$, entonces $\vec{F}(x,y,x)$ es un campo vectorial conservativo

---

6. Obtenga un campo vectorial conservativo que tenga por función potencial $f(x,y,z) = 2x^3\text{-}3x^2y + xy^2 - 4y^3$

---

7. Si **F** es un campo vectorial y **f** una función escalar, pruebe:
   a) El rotacional del gradiente de una función es nulo
   b) La divergencia del rotor de un campo vectorial es nulo

LAPLACIANO - DIVERGENCIA DEL GRADIENTE

a) CAMPO VECTORIAL SOLENOIDAL - DIVERGENCIA NULA

$$divF = \nabla \bullet F = 0$$

---

8. Determine el valor de la constante α de forma que el vector **V** sea solenoidal
   $V = \left[(x+3y)\,\hat{i} + (y-2z)\,\hat{j} + (x+\alpha z)\,\hat{k}\right]$.

---

9. Sea ***f*** un campo escalar y ***F*** un campo vectorial, establezca si cada expresión es un campo vectorial, uno escalar o si carece de sentido, justifique

a) *rot f* *b) grad F*

c) *div (grad f)* *d) grad f*

e) *rot (grad f)* *f) grad (div f)*

g) *div (div F)* *h) (grad f) x (div F)*

i) *rot (rot F)* *j) grad (div F)*

k) *div F* *l) div [rot (grad f)]*

m) *rot (div F)* *n) div (grad F)*

PROBLEMAS DE APLICACION

Los siguientes ejercicios de aplicación de Campos Vectoriales se desarrollan por ser de aplicación en diversas materias de ingeniería

a) VELOCIDAD ANGULAR

10. Cuando una partícula rota con velocidad angular cte., el rotacional del campo de velocidad es el doble de la velocidad angular de la partícula.
Siendo $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ demuestre que $rot\ \vec{v} = 2\vec{\omega}$ siendo ω un vector constante

$$rot\bar{v} = \nabla \times \overline{v} = \nabla \times (\omega \times r) = \nabla \times \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

$$= \nabla \times [\ (w_2 z - w_3 y)\,\hat{i} + (w_3 x - w_1 z)\,\hat{j} + (w_1 y - w_2 x)\,\hat{k}\ ]$$

$$rot\,\bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (w_2\, z - w_3 y) & (w_3 x - w_1 z) & (w_1 y - w_2 x) \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(w_1\ \hat{i} + w_2\ \ \hat{j} + w_3\ \hat{k}\right) = 2\left(w_1\ \hat{i} + w_2\ \ \hat{j} + w_3\ \hat{k}\right) = 2\omega$$

Por lo tanto, $2\omega = rot\bar{v}$

---

b) CAMPO GRAVITACIONAL

11. Determine la fuerza gravitacional ejercida por un objeto de masa **M** localizado en el origen de coordenadas en el espacio $\mathbf{R^3}$, sobre el objeto de masa **m** ubicado en el espacio mediante el vector posición $\bar{r} = \langle x; y; z \rangle$. La fuerza gravitacional ejercida sobre este segundo objeto actúa con dirección hacia el origen. El vector unitario en esta dirección es:

$$|F| = \frac{mMG}{r^2} \qquad \text{como } r = |\bar{r}| \quad y \quad r^2 = |\bar{r}|^2 \qquad \hat{r} = -\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$$

por consiguiente, la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto en $r = \langle x; y; z \rangle$ es:

$$F_{(r)} = -\frac{m\,M\,G}{|\bar{r}|^3}\,r$$

Esta formula es una forma abreviada de describir el campo gravitacional. Podemos expresarlo en función de sus componentes:

$$r = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} \qquad y \qquad |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$F_{(x;y;z)} = \frac{-mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{i} + \frac{-mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{j} + \frac{-mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

Optativos

1. Grafique los siguientes campos vectoriales, dibujando algunos vectores representativos del mismo y ubicando cada vector con su origen en el punto (x, y)

   a) $F(x,y) = -yi + xj$

   b) $F(x,y) = \langle y, -x \rangle$

   c) $F(x,y) = \langle x^2, y \rangle$

---

2. Determine el rotor y divergencia de los siguientes campos vectoriales:

   $F(x,y,z) = (2x - y)\vec{i} + (2z - 3y)\vec{j} + (7x - 4z)\vec{k}$

   $F(x,y,z) = \text{sen } xi + \cos xj + z^2 k$

---

3. Encuentre ***a, b, c*** tal que $F(x,y,z) = (x + 2y + az)\,\vec{i} + (bx - 3y - z)\,\vec{j} + (4x + cy)\vec{k}$ sea irrotacional.
